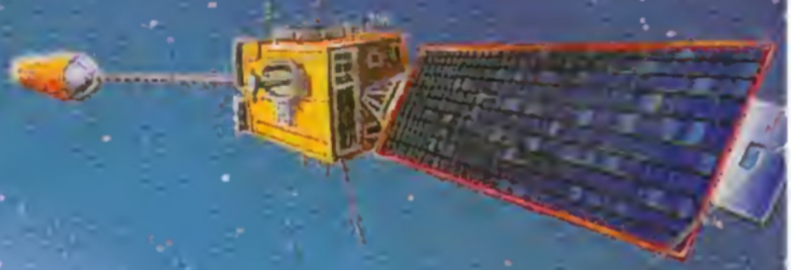
ELY BRETT C.
Egresado I.P.C.

WILLIAM A. SUÁREZ
Egresado I.U.P.E.B.

TEORÍA Y PRÁCTICA DE

FÍSICA



1ER AÑO

CICLO DIVERSIFICADO

TEORÍA
PRÁCTICA
PROBLEMARIO
AUTOEVALUACIÓN

UNIDAD 0

UNIDAD DE NIVELACIÓN

- Ejercitación previa. Despejes.
- Rectas paralelas cortadas por una secante.
- Teorema de Pitágoras.
- Trigonometría de los triángulos rectángulos.
- Ley de los cosenos.
- Ley de los senos.
- Introducción vectorial.

UNIDAD 0

UNIDAD DE NIVELACION

0.1 Ejercitación previa

A continuación se proponen una serie de ejercicios para que adquieras destreza en las operaciones de uso frecuente en el desarrollo del contenido programático.

1. Se da la siguiente expresión:

$$P = \frac{1}{a - b} - \frac{1}{a + b}$$

Encontrar el valor de P para a = 3 y b = 1

R: 1/4

2. En la expresión ma + Ma = P-q encontrar el valor de a para los valores dados P = 20, q = 10, m = 0,2 y M = 0,3

R: 20.

3. En cada una de las expresiones despejar la letra señalada en el paréntesis de la derecha:

3.1 $\frac{4a - 35}{3} = 9(1 - a)$ ..... (a)

3.2 $\frac{1}{m + 1} = \frac{1}{2m - 1}$ ..... (m)

3.3 $\frac{1}{f} = \frac{1}{P} - \frac{1}{q}$ ..... (q)

3.4 $\frac{1}{3x + 4} = \frac{2}{x + 8}$ ..... (x)

3.5 $R = 2m\sqrt{\frac{S}{K}}$ ..... (K)

3.6 $m(a + b) = aS + bK$ ..... (b)

3.7 $h = hV + \frac{1}{2} mV^2$ ..... (V)

3.8 $h = \sqrt{V^2 - 2ML}$ ..... (M)

3.9 $hV = hV_0 + \frac{1}{2} mV^2$ ..... (h)

3.10 $F = \frac{M m}{r^2}$ ..... (r)

4. Dada la expresión

$$S = Vt + \frac{1}{2} at^2$$

Encontrar el valor de a para S = 100, V = 20 y t = 4

R: 2,5

5. Dada la expresión

$$mgy + \frac{1}{2} mV^2 = \frac{1}{2} KX^2$$

Encontrar el valor de X para los valores dados de V = 30 y = 8, g = 10, m = 20, K = 12

R: 42,03

6. Dada la expresión

$$T = 2H\frac{L}{S}$$

Calcular el valor de L para T = 0,2; S = 9 y H = 2,25

R: 0,2

7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $t(13 - t) = 40$ **R: 8 y 5**

b) $\frac{3a + 14}{2a - 2} - 2a = 7$ **R: 7/4 y 4**

c) $\sqrt{m + \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$ **R: 2**

d) $\begin{cases} 3(2a + b) = -36 \\ -3a - b = 13 \end{cases}$ **R: -1 y -10**

e) $\begin{cases} 0{,}5m + 0{,}75n = m - 1{,}25 \\ 0{,}4m - 0{,}8n = n - 1{,}4 \end{cases}$ **R: 2 y 5,5**

f) $\frac{2a}{15} - \frac{3a - 5}{20} = \frac{a}{5} - 3$ **R: 15**

g) $\begin{cases} 5X^2 - Y = 13 \\ 9X - 2Y = 4 \end{cases}$ **R: 2 y 7**

h) $\begin{cases} X^2 - Y^2 = 25 \\ X + Y = 25 \end{cases}$ **R: 13 y 12**

8. A continuación se te propone un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} m_2 g - T = m_2 a \\ T - m_1 g = m_1 a \end{cases}$$

8.1 Escribe una expresión en donde aparezca a en función de m_1, m_2 y g.

8.2 Escribe T en función de m_1, m_2 y g

9. A continuación se te presenta un par de ecuaciones:

$$\begin{cases} T = m_1 a \\ m_2 - T = m_2 a \end{cases}$$

9.1 Demuestra que a puede escribirse como

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot g$$

9.2 Demuestra que T puede escribirse como

$$T = \frac{m_1 . m_2}{m_1 + m_2} \cdot g$$

0.2 Rectas paralelas cortadas por una secante

Consideremos dos rectas **R** y **R'**, las cuales son paralelas entre sí.

Sea **SS'** una recta secante a las rectas **R** y **R'** tal como lo indica la figura 0.1.

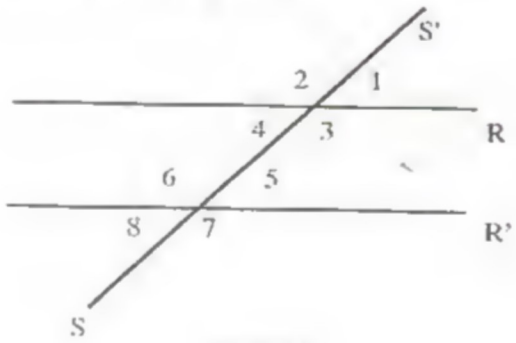


Figura 0.1

Dichas rectas originan algunos ángulos que mencionamos a continuación:

Alternos internos:

$$\begin{cases} \hat{4} \text{ y } \hat{5} \\ \hat{6} \text{ y } \hat{3} \end{cases}$$

Alternos externos:

$$\begin{cases} \hat{8} \text{ y } \hat{1} \\ \hat{7} \text{ y } \hat{2} \end{cases}$$

Correspondientes :

$$\begin{cases} \hat{5} \text{ y } \hat{1} \\ \hat{7} \text{ y } \hat{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{4} \text{ y } \hat{8} \\ \hat{6} \text{ y } \hat{2} \end{cases}$$

En cursos anteriores de matemática se demostró que:

- Los ángulos alternos internos son iguales:

$\hat{4} = \hat{5}$ y $\hat{6} = \hat{3}$

- Los ángulos alternos externos son iguales:

$\hat{8} = \hat{1}$ y $\hat{7} = \hat{2}$

- Los ángulos correspondientes son iguales:

$\hat{7} = \hat{3}$ y $\hat{4} = \hat{8}$

$\hat{5} = \hat{1}$ y $\hat{6} = \hat{2}$

- Los ángulos opuestos por el vértice son iguales:

$\hat{2} = \hat{3}$; $\hat{4} = \hat{1}$; $\hat{6} = \hat{7}$ y $\hat{8} = \hat{5}$

0.3 Teorema de Pitágoras

Consideremos un triángulo rectángulo ABC, cuyo ángulo recto está en el vértice C de la figura 0.2.

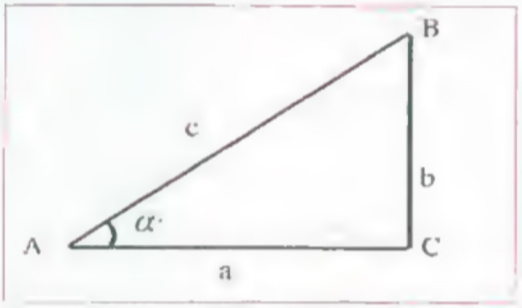


Figura 0.2

En el triángulo de la figura 0.2 se tiene que:

α : es el ángulo agudo

La hipotenusa es AB = c

Los catetos son AC = a y BC = b

Recuerda que la hipotenusa siempre estará opuesta al ángulo recto.

El teorema de Pitágoras nos relaciona las longitudes de los lados de la siguiente forma:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Como puede notarse, es posible calcular la longitud de un lado conociendo los otros dos.

Ejercicios

1. Usa el teorema de Pitágoras y calcula la longitud del lado desconocido en cada una de las figuras dadas a continuación:

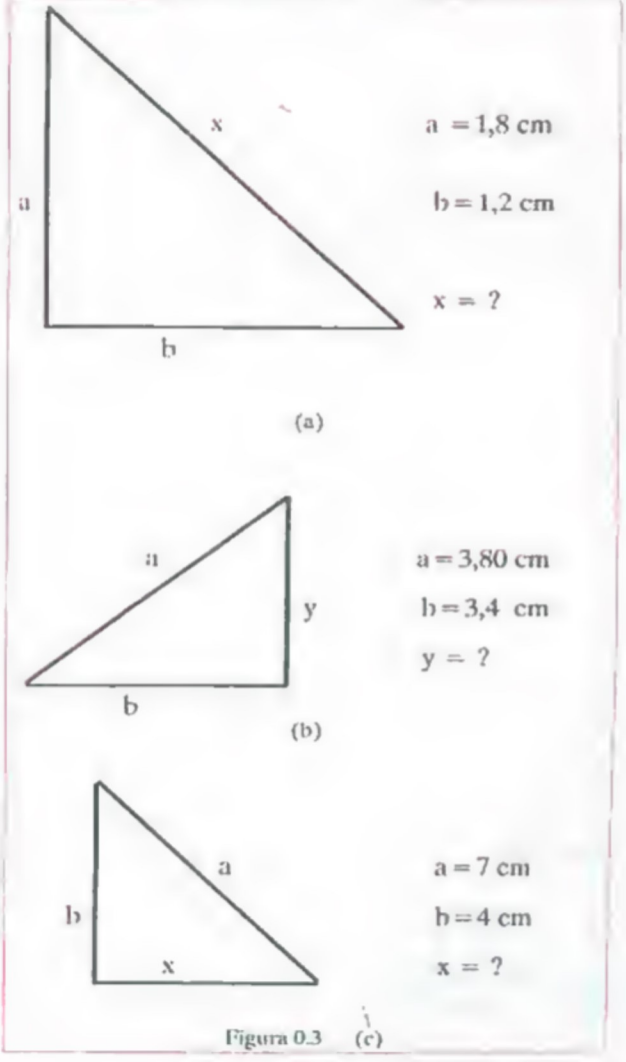


Figura 0.3

R: a) 2,16 cm b) 1,69 cm c) 5,74 cm

2. Calcular la diagonal de un rectángulo cuyos lados miden 5 cm y 2 cm respectivamente.

R: 5,38 cm

3. Se tiene un cuadrado de 8 cm de lado inscrito en una circunferencia. Calcular el radio de la circunferencia.

R: 5,65 cm

4. Cada lado de un triángulo equilátero mide 8 cm. ¿Cuánto mide la altura de dicho triángulo?.

R: 6,93 cm.

0.4 Trigonometría de los triángulos rectángulos.

La trigonometría estudia las relaciones existentes entre los ángulos y los lados de los triángulos.

Razones trigonométricas de un ángulo

Como la base del estudio de la trigonometría es el ángulo, veamos algunos aspectos relativos a él.

Un ángulo es la porción del plano limitado por dos semirrectas que tienen un origen común.

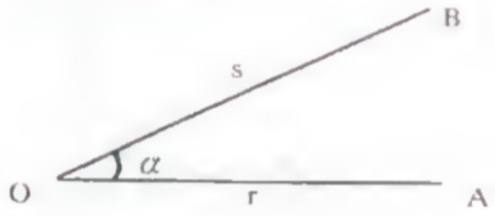


Figura 0.4

En la figura 0.4 el origen O es el vértice del ángulo.

Las semirrectas Or y Os .

Se representa el ángulo mediante las notaciones siguientes:

$$\alpha = \hat{rOs} = \hat{rs} = \hat{AOB}$$

Puede decirse también que el ángulo está generado por una semirrecta que gira sobre un punto O. La posición de OA es la inicial y la posición de OB es la terminal.

Según el sentido del giro podemos decir que:

- Un ángulo es **positivo** si el giro para describirlo es de sentido contrario al de las agujas del reloj.
- Un ángulo es **negativo** si el giro para describirlo es del mismo sentido que el giro de las agujas del reloj.

Consideremos un triángulo rectángulo como el indicado en la figura 0.5, el cual es recto en el vértice C. Sea α el ángulo agudo ubicado en el vértice A.

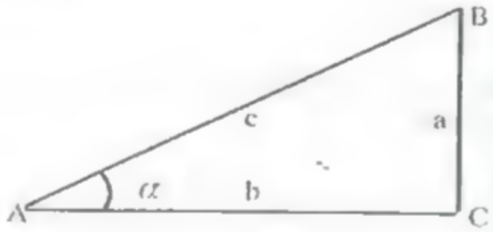


Figura 0.5

Existen tres funciones trigonométricas o razones trigonométricas comunes de un ángulo. A todo ángulo le corresponde un número, obtenido como cociente entre las medidas de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

Para el ángulo α estos cocientes son expresados de la siguiente forma:

$$\text{seno } \alpha = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\text{coseno } \alpha = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\text{tangente } \alpha = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{lado adyacente}}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}$$

Ejemplo 1

En el triángulo de la figura 0.6 calcular las longitudes x e y sabiendo que $\alpha = 30^{\circ}$ y $z = 8$ cm.

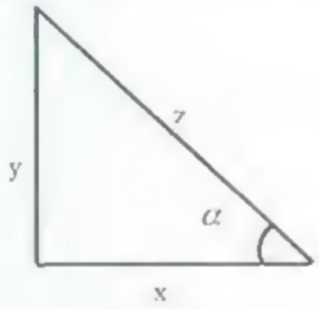


Figura 0.6

Solución

Apliquemos las definiciones dadas en el triángulo de la figura 0.6.

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{z} \quad \text{de donde}$$

$$y = z.\operatorname{sen} \alpha = 8 \text{ cm} \cdot \operatorname{sen} 30^{\circ}$$

$$y = 8 \text{ cm} \cdot 0{,}5$$

$$y = 4 \text{ cm}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{z} \quad \text{de donde}$$

$$x = z.\cos \alpha = 8 \text{ cm} \cdot \cos 30^{\circ}$$

$$x = 8 \text{ cm} \cdot 0{,}86$$

$$x = 6{,}88 \text{ cm}$$

Ejemplo 2

Hallar el valor del ángulo en cada caso:

a) Si $\operatorname{sen} \alpha = 0{,}7896$

$\alpha = 52^{\circ}\ 8'53''$

b) Si $\cos \alpha = 0{,}866$

$\alpha = 30^{\circ}\ 0'10''$

c) Si $\tan \alpha = 2{,}050$

$\alpha = 63^{\circ}\ 59'48''$

d) Si $\cos \alpha = 0{,}4342$

$\alpha = 64^{\circ}\ 15'56''$

Comprueba los resultados haciendo uso de tu calculadora.

Ejercicios.

1. Dada una razón trigonométrica, encuentra en cada caso el valor del ángulo . Usa tu calculadora.

a) $\operatorname{sen} \alpha = 0{,}6018$ b) $\cos \alpha = 0{,}7071$

c) $\operatorname{tag} \alpha = 1{,}22$ d) $\operatorname{sen} \alpha = 0{,}1736$

e) $\cos \alpha = 0{,}8988$ f) $\operatorname{tag} \alpha = 0{,}7002$

g) $\operatorname{sen} \alpha = 0{,}1821$ h) $\cos \alpha = 0{,}2618$

2. Uno de los ángulos de un triángulo rectángulo mide 20°. Si la longitud de la hipotenusa mide 6 cm, calcular las longitudes de los otros dos lados.

R: 2,052 cm y 5,638 cm

3. Calcular en cada caso el valor del ángulo y el lado desconocido.

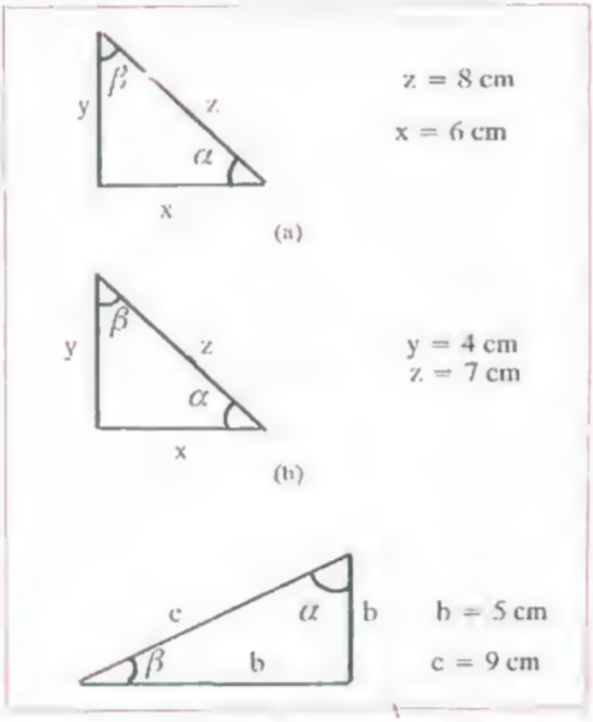


Figura 0.7 (c)

Respuestas

a) $y = 5{,}29$ cm $\alpha = 41^\circ\ 24'34{,}64''$
$\beta = 48^\circ\ 35'25{,}36''$

b) $x = 5{,}74$ cm $\alpha = 34^\circ\ 50'59{,}66''$
$\beta = 55^\circ\ 9'$

c) $a = 7{,}48$ cm $\beta = 56^\circ\ 15'3{,}64''$
$\alpha = 33^\circ\ 44'56{,}36''$

0.5 Ley de los cosenos

Cuando se emplea la trigonometría del triángulo rectángulo dos de los lados del triángulo deben ser perpendiculares entre sí.

A veces se nos presenta el caso donde debemos trabajar con un triángulo no rectángulo. Para ello debemos recurrir a la **ley de los cosenos**, la cual es aplicable a todos los triángulos, sean rectángulos o no. Su enunciado es como sigue:

En todo triángulo, el cuadrado de un lado cualquiera es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de ellos por el coseno del ángulo que forman.

Si observamos la figura 0.8 podemos escribir para cada lado las siguientes expresiones:

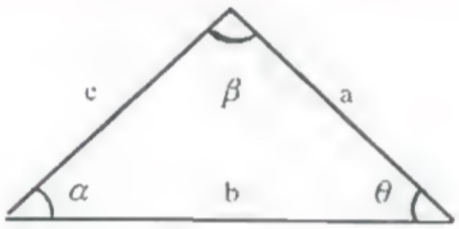


Figura 0.8

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

0.6 Ley de los senos

La ley de los senos es también aplicable a todos los triángulos y su enunciado es como sigue:

En un triángulo cualquiera, la razón de un lado al seno del ángulo opuesto es constante

Si usamos la figura 0.8 podemos escribir que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\theta}$$

0.7 Vectores

Las **magnitudes escalares** son aquellas que quedan completamente especificadas mediante un número seguido de la unidad correspondiente. La longitud, la temperatura, la masa, la densidad, el tiempo, el volumen, la superficie son ejemplos de magnitudes escalares.

Las magnitudes vectoriales se caracterizan porque además de su módulo es necesario especificar su dirección y sentido. Son magnitudes vectoriales: la fuerza, la velocidad, el desplazamiento, la cantidad de movimiento, la aceleración, etc.

Las magnitudes vectoriales se representan mediante **un vector**, el cual se define como **un segmento de recta orientado y dirigido, que tiene un origen y un extremo.** En la figura 0.9 se representa un vector de origen A y extremo B.

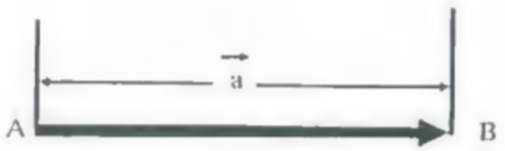


Figura 0.9

La recta que contiene al vector origina la **dirección.**

La orientación de la recta definida por el origen y el extremo del vector determina **el sentido.**

La cantidad de veces que contiene la unidad es la longitud del vector, la cual recibe el nombre de **módulo del vector.**

Observaciones importantes

A las magnitudes vectoriales las denotaremos con una letra en **negrilla**. Así, en la figura 0.9 se tiene:

AB se lee vector de origen A y extremo B.

a se lee vector a.

El módulo de un vector se indica con barras verticales

$|\mathbf{AB}|$: se lee módulo del vector AB.

También se usa escribir sin negrillas cuando se trate de módulo de un vector. Así por ejemplo

AB: se lee módulo de **AB**.

0.8 Clases de vectores.

Vectores fijos o ligados. Son aquellos que tienen un punto de aplicación fijo en el espacio. Estos quedan definidos por sus tres componentes cartesianas y por las tres componentes de su punto de aplicación. Una fuerza que actúa sobre una partícula dada posee un punto de aplicación bien definido que es la propia partícula.

Vectores deslizantes. Son los vectores cuyo punto de aplicación se puede desplazar sobre la recta de acción donde están apoyados. En la figura 0.10 el punto de aplicación A del vector **AB** ha sido trasladado al punto de aplicación A'del vector **A'B'**.

Nótese que se ha trasladado sobre la misma recta de acción.

Figura 0.10

Vectores libres. Son el conjunto de vectores que tienen la misma dirección, magnitud y sentido, pero diferentes rectas de acción (fig 0.11).

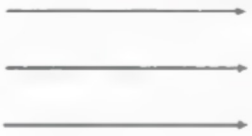


Figura 0.11

Estos vectores pueden ser trasladados paralelos a sí mismos, teniendo como origen cualquier punto del espacio. Si un cuerpo rígido realiza un movimiento de traslación rectilínea. todas las partículas tienen velocidades de la misma dirección magnitud y sentido, por lo que la velocidad del cuerpo puede representarse por el vector libre que tiene magnitud, dirección y sentido igual a los de la velocidad de una cualquiera de las partículas.

Vectores polares. Son aquellos cuyas magnitudes que representan están ligadas a una traslación. El vector velocidad lineal es un vector polar.

Vectores axiales. Son aquellos cuyas magnitudes que representan están ligados a una rotación. El vector velocidad angular es un vector axial (fig 0.12) porque puede rotar alrededor de un eje y es perpendicular al plano de rotación.

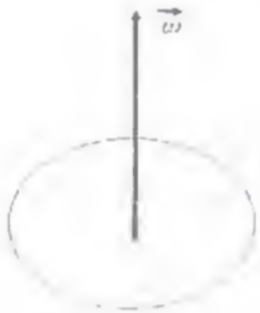


Figura 0.12

Vectores opuestos. Son dos vectores tales que, teniendo el mismo módulo y la misma dirección, tienen sentidos opuestos. En la figura 0.13 el vector **a** es opuesto al vector -a.

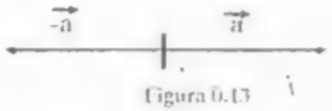


Figura 0.13

Vectores unitarios. Son vectores sin dimensión, cuyo módulo es igual a la unidad, los cuales son empleados para especificar una dirección dada. Ellos no tienen otro significado físico, simplemente se usan por conveniencia para describir una dirección en el espacio.

Vectores paralelos. Son dos vectores tales que, teniendo la misma dirección y sentido sus magnitudes son proporcionales. En la figura 0.14 se muestran dos vectores paralelos.

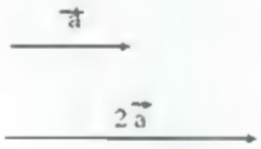


Figura 0.14

Versores fundamentales. Son los vectores unitarios (de magnitud igual a 1) cuyas direcciones y sentidos coinciden con los ejes coordenados. Ellos constituyen un conjunto de vectores mutuamente perpendiculares, los cuales serán representados de la manera siguiente: i, j, k, con i sobre el eje X, j sobre el eje Y, y k sobre el eje Z. Obsérvese la figura 0.15.

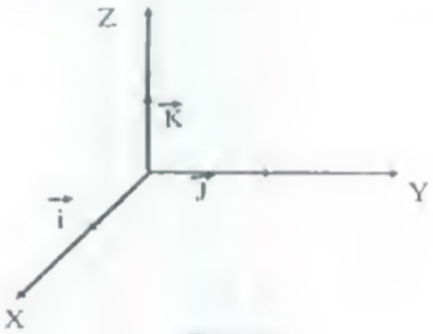


Figura 0.15

0.9 Direccion de un vector en el plano

La dirección de un vector es el ángulo que él forma con respecto a un eje de referencia.

Un método usado para dar la dirección de un vector se refiere a las direcciones convencionales: norte, sur, este y oeste. Así, por ejemplo, en la figura 0.16 se muestran varios vectores en un plano.

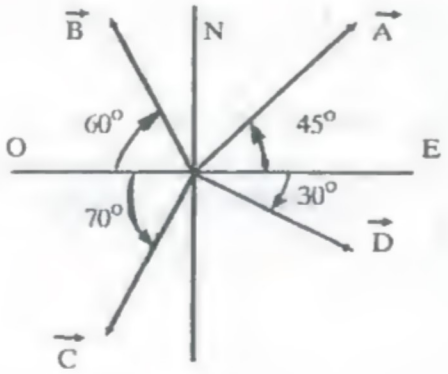


Figura 0.16

El vector **A**, de magnitud igual a 8 unidades, está ubicado 45° al norte del este.

El vector **B**, de magnitud igual a 7 unidades, está localizado 60° al norte del oeste.

El vector **C**, de magnitud igual a 5 unidades, está ubicado 70° al sur del oeste.

El vector **D**, de magnitud igual a 6 unidades, está ubicado 30° al sur del este.

* Coordenadas polares de un vector

Otro método usado para especificar la dirección de un vector consiste en hacer uso de dos líneas perpendiculares entre sí, a las cuales llamaremos **ejes**. La línea horizontal recibe el nombre de **eje X** y la línea vertical recibe el nombre de **eje Y**.

En este caso la **dirección de un vector** se define como el ángulo medido en sentido contrario al avance de las manecillas de un reloj, desde la dirección positiva del eje x.

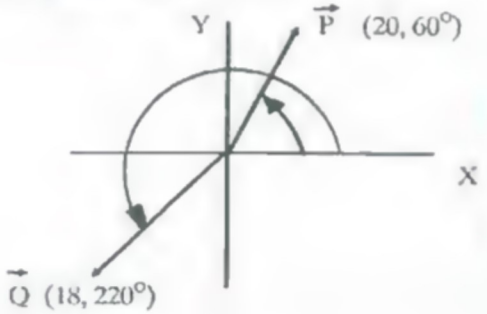


Figura 0.17

En la figura 0.17 se tienen los siguientes vectores:

P: de magnitud 20 unidades y dirección 60°.

Q: de magnitud 18 unidades y dirección 220°.

Esta forma de expresar un vector, con sus unidades de magnitud (valor absoluto) y el ángulo medido en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, a partir de la dirección positiva del eje x le llamaremos **coordenadas polares de un vector.**

Así, los vectores **P** y **Q** de la figura 0.17 expresados en coordenadas polares son:

$P = (20, 60^{o})$

$Q = (18, 220^{o})$

En general, si $|\mathbf{R}|$ es el valor absoluto de un vector y θ es la dirección, puede escribirse el vector **R** en **coordenadas polares** así:

$$\mathbf{R} = (|\mathbf{R}|, \theta).$$

0.10 Componentes rectangulares de un vector.

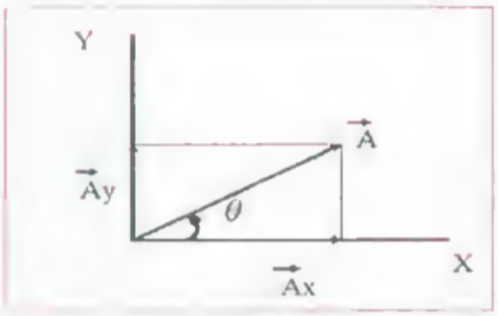


Figura 0.18

Consideremos el vector A en el plano xy, tal como lo muestra la figura 0.18. Dicho vector tiene su origen ubicado en el origen del sistema de coordenadas rectangulares y forma un ángulo con el eje positivo de las x. Si desde el extremo de A, se trazan sus proyecciones sobre los ejes, se obtienen dos componentes:

$\vec{A}_x$: componente de $\vec{A}$ en la dirección de x

$\vec{A}_y$: componente de $\vec{A}$ en la dirección de y.

Las componentes x e y del vector $\vec{A}$ vienen dadas en módulo así:

$$A_x = |A|.\cos\theta = A.\cos\theta$$

$$A_y = |A|.\operatorname{sen}\theta = A.\operatorname{sen}\theta$$

Es necesario hacer notar que las componentes de un vector en las direcciones de los ejes son las longitudes de A_x y A_y y por lo tanto se comportan como cantidades escalares, ya que para especificarlas en cualquier sistema de coordenadas de un referencial dado sólo interesa un número con el signo algebraico.

La longitud o magnitud de un vector, en función de sus componentes viene dado por:

$$|A| = A = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2}$$

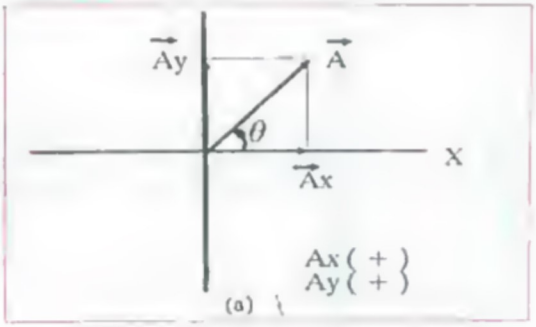
La dirección del vector viene dada por el ángulo que forma dicho vector con la dirección positiva del eje x, medido en sentido contrario al avance de las manecillas del reloj.

Este ángulo puede calcularse por la relación:

$$\tan\theta = \frac{|A_y|}{|A_x|}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{|A_y|}{|A_x|}$$

En general, los signos de las componentes rectangulares de un vector dependen del cuadrante donde él esté localizado. En la figura 0.19 se muestra un resumen de los signos de las componentes de un vector A cuando se ubica en los diferentes cuadrantes.



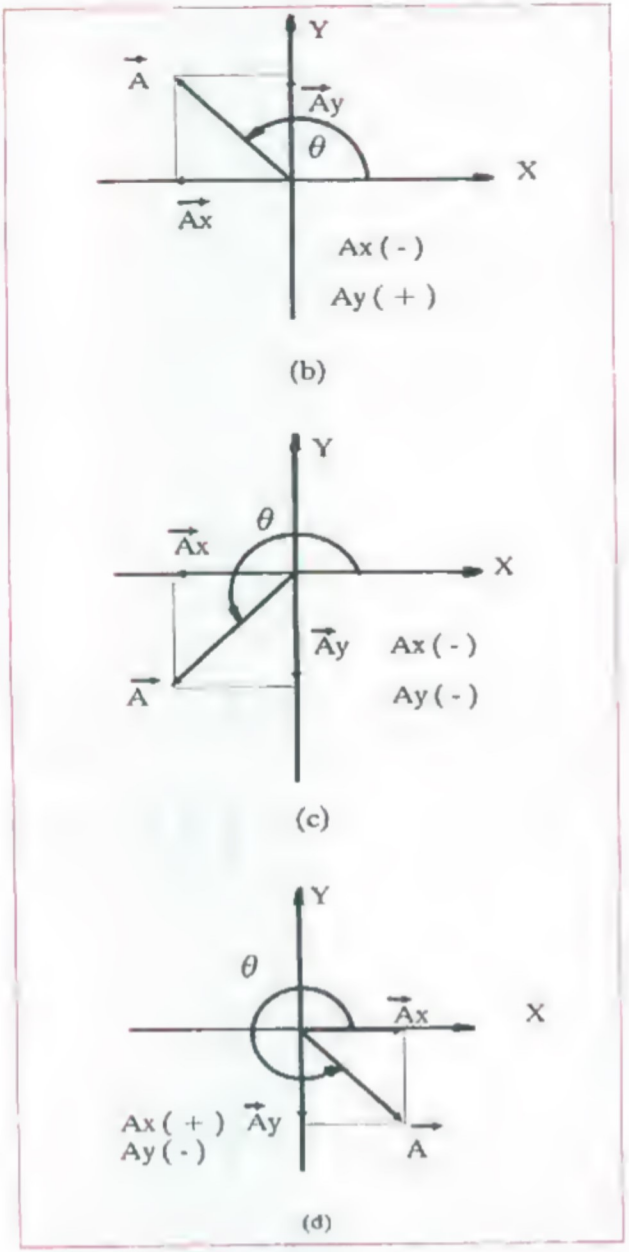


Figura 0.19

Paso de coordenadas rectangulares a polares

Un vector, expresado en coordenadas rectangulares puede ser expresado en coordenadas polares o viceversa. Para ello nos referiremos al siguiente ejemplo:

Sea el vector $\vec{A}$ dado por sus coordenadas cartesianas A = (4,3). Expresemos dicho vector en coordenadas polares.

Sabemos que el vector $\vec{A}$, expresado en coordenadas polares viene dado por ($|A|$, θ), donde $|A|$ es la magnitud de dicho vector y θ es el ángulo que dicho vector forma con la dirección positiva del eje x, medido en sentido contrario al avance de las manecillas del reloj.

La magnitud la calculamos así:

$$|A| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2}$$

$$|A| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25}$$

$$|A| = 5.$$

El ángulo se calcula por la relación:

$$\tan\theta = \frac{|A_y|}{|A_x|} = \frac{3}{4}$$

$$\theta = 36^\circ\ 52'\ 11''$$

Luego el vector A expresado en coordenadas polares es:

$$A = (5,\ 36^\circ\ 52'11'')$$

Paso de coordenadas polares a rectangulares

Recíprocamente, un vector expresado en coordenadas polares puede ser expresado en coordenadas rectangulares con solo calcular sus componentes en las direcciones de los ejes.

Sea el vector $R = (8, 132^\circ)$ el cual está representado en la figura 0.20.

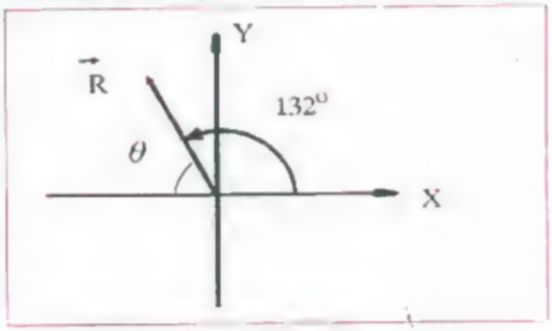


Figura 0.20

Calculemos las **componentes** en las direcciones de los ejes.

Como el ángulo polar es mayor de 90° usaremos como auxiliar el ángulo θ, el cual se obtiene así:

$$\theta = 180^o - 132^o = 48^o$$

Las componentes en las direcciones de los ejes vendrán dadas por:

$$R_x = |\mathbf{R}| . \cos \theta$$

$$R_x = -8 . \cos 48^o$$

$$\boxed{R_x = -5{,}35}$$

$$R_y = |\mathbf{R}| . \operatorname{sen} \theta$$

$$R_y = 8 . \operatorname{sen} 48^o$$

$$\boxed{R_y = 5{,}95}$$

El vector $\mathbf{R} = (8, 132^o)$ expresado en coordenadas polares se transforma en $\mathbf{R} = (-5{,}35 ; 5{,}95)$ expresado en coordenadas cartesianas.

0.11 Expresión analítica de un vector en el plano en función de los vectores unitarios

Consideremos un vector **V**, el cual está ubicado en el plano xy de la figura 0.21.

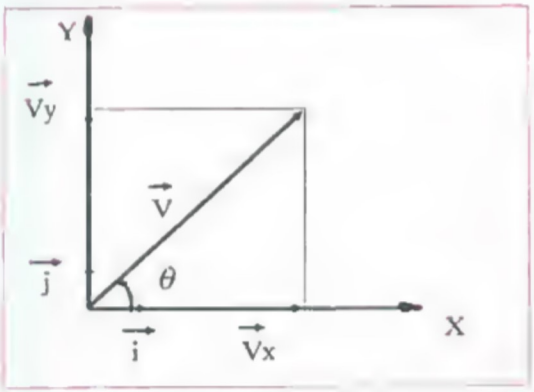


Figura 0.21

El producto de la componente V_x y el vector unitario **i** es el vector $V_x\mathbf{i}$, el cual es paralelo al eje x con magnitud V_x.

De la misma forma $V_y\mathbf{j}$ es un vector de magnitud V_y paralelo al eje y.

De esta manera, en términos de los vectores unitarios se puede escribir el vector **V** así:

$$\mathbf{V} = V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j}$$

Esta última es la **expresión analítica del vector en función de los vectores unitarios i,j**. Esto no debe ser confundido con A_x y A_y, las cuales se refieren siempre a las componentes de **A** en las direcciones de los ejes.

Consideremos **V** y **R** dos vectores dados por sus componentes rectangulares de la manera siguiente: $\mathbf{V} = (2,5)$ y $\mathbf{R} = (-3,4)$.

La expresión analítica en función de los vectores unitarios para cada uno de ellos es:

$$\mathbf{V} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}.$$

$$\mathbf{R} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

Ejemplo

Dado el vector de origen A(2,1) y extremo B(3,3), escribir el vector **AB** en función de los vectores unitarios **i**, **j**. Encontrar también la dirección del vector $\mathbf{AB} = \mathbf{V}$ (figura 0.22)

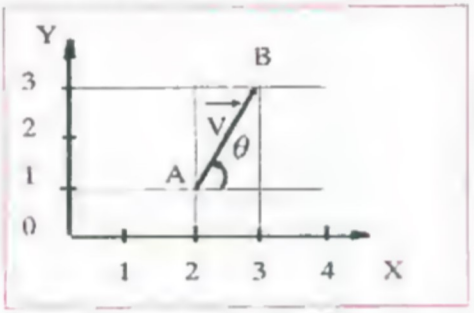


Figura 0.22

Solución

Las coordenadas del vector **AB** vienen dadas así:

$$AB(3-2, 3-1)$$

$$AB(1,2)$$

UNIDAD EDUCATIVA "LA INMACULADA"

La componente x del vector **AB** se ha obtenido restando la componente x del extremo B, menos la componente x del origen A.

La componente y del vector **AB** se ha obtenido restando la componente y del extremo B, menos la componente y del origen A.

El vector **AB** puede escribirse en función de sus vectores unitarios así:

$$\mathbf{AB}(1,2) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

El módulo de **AB** viene dado por:

$$|AB| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2}$$

$$= \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

La dirección del vector **AB** = **V** es el ángulo medido en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, desde la dirección positiva del eje x. Este ángulo puede calcularse por la relación:

$$\tan\theta = \frac{|V_y|}{|V_x|}$$

$$\tan\theta = 2/1$$

$$\theta = 63^\circ\ 26'5{,}82''$$

0.12 Expresión analítica de un vector en el espacio

Un vector en el espacio viene representado por tres componentes sobre los ejes. Sea **V** un vector que se encuentra en el espacio y sean α, β y θ los ángulos que forma el vector con los semiejes positivos X, Y, Z.

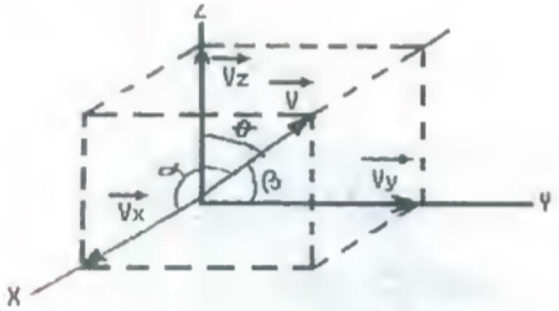


Figura 0.23

Los cosenos de los ángulos α, β y θ los llamaremos **cosenos directores del vector**, llamados así porque fijan la dirección del vector **V** en el espacio. Ellos quedan determinados a través de las relaciones siguientes:

$$\cos\alpha = \frac{V_x}{|V|}$$

$$\cos\beta = \frac{V_y}{|V|}$$

$$\cos\theta = \frac{V_z}{|V|}$$

El vector **V** puede ser escrito en función de los vectores unitarios así:

$$\mathbf{V} = V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k}$$

en donde **i, j, k** son los vectores unitarios en las direcciones de los ejes.

Los números V_x, V_y, V_z son conocidos como **las componentes cartesianas del vector.**

La magnitud del vector viene dada por la expresión:

$$|V| = \sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2 + (V_z)^2}$$

La magnitud de un vector es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus componentes

Ejemplo

Un vector V(x, y, z) tiene como componentes (3, -2, 1).

Hallar: a) su magnitud b) los cosenos directores.

Solución

a) En la figura 0.24 se ha representado el vector V(3,-2,1).

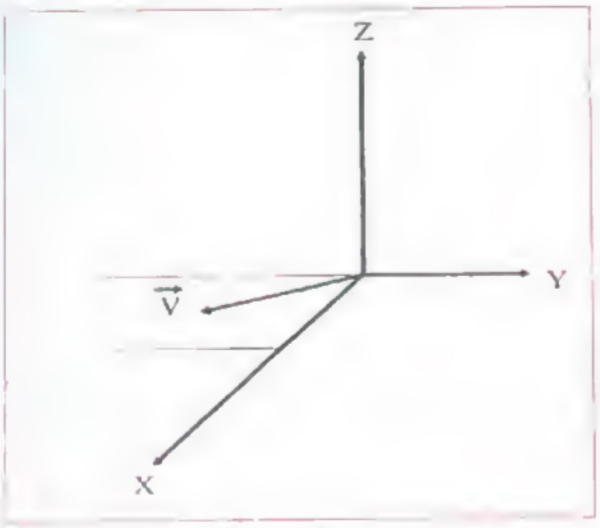


Figura 0.24

Su magnitud viene dada por:

$$|V| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}$$

$$|V| = \sqrt{14} = 3,74$$

b) Los cosenos directores los obtenemos así:

$$\cos\alpha = \frac{V_x}{|V|} = \frac{3}{3,74} = 0,8$$

$$\cos\beta = \frac{V_y}{|V|} = \frac{2}{3,74} = -0,53$$

$$\cos\theta = \frac{V_z}{|V|} = \frac{1}{3,74} = 0,27$$

0.13 Vector unitario de un vector dado

El vector unitario de un vector dado es otro vector cuyo módulo es la unidad, y su dirección y sentido es el del vector del que es unitario.

Si **U** es el vector unitario y **V** un vector cualquiera puede decirse como **norma general** que el vector **V** puede ser expresado como producto de su módulo por el vector unitario:

$\mathbf{V} = |\mathbf{V}|.\mathbf{U}$ en donde el vector unitario queda expresado como:

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|}$$

Esta expresión se lee **vector unitario en la dirección de V.**

Ejemplo

Dado el vector $\mathbf{V} = -3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ hallar un vector unitario en la dirección de **V**

Solución

Debemos calcular el módulo de **V**

$$|\mathbf{V}| = \sqrt{9 + 25 + 4}$$

$$|\mathbf{V}| = \sqrt{38.}$$

Luego el vector unitario **U** en la dirección de **V** es:

$$\mathbf{U} = \frac{-3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{38}$$

$$\mathbf{U} = \frac{-3}{\sqrt{38}}\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{38}}\mathbf{j} - \frac{2}{\sqrt{38}}\mathbf{k}$$

0.14 Operaciones con vectores

Suma de vectores. Método analítico

Sean **A** y **B** dos vectores dados por sus expresiones analíticas. Su suma es:

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} + (A_z + B_z)\mathbf{k}$$

Esto se traduce diciendo:

La suma analítica de varios vectores es igual a la suma de las componentes de los vectores en cada eje.

Resta de vectores. Método analítico.

La resta o diferencia $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ de los vectores A y B viene dada por:

$$\mathbf{D} = (A_x - B_x)\mathbf{i} + (A_y - B_y)\mathbf{j} + (A_z - B_z)\mathbf{k}$$

Ejemplo

Sean los vectores siguientes:

$\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

Hallar: a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ b) $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ c) Un vector unitario en la dirección de $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ d)La dirección de $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.

Solución

a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) + (5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$$

b) $\mathbf{A} - \mathbf{B} = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) - (5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$.

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

c) Para encontrar un vector unitario en la dirección de $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ aplicamos la definición:

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{|\mathbf{A} + \mathbf{B}|}$$

Encontremos $|\mathbf{A} + \mathbf{B}|$

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B}| = \sqrt{7^2 + 2^2 + 9^2}$$

$$= \sqrt{49 + 4 + 81}$$

$$= \sqrt{134}$$

Luego:

$$\mathbf{U} = \frac{7}{\sqrt{134}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{134}}\mathbf{j} - \frac{9}{\sqrt{134}}\mathbf{k}$$

d) Para encontrar la dirección de $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ es necesario calcular los cosenos directores de los ángulos:

$$\cos\alpha = \frac{(\mathbf{A} + \mathbf{B})_x}{|\mathbf{A} + \mathbf{B}|}$$

$$\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{134}}$$

$$\alpha = 52^\circ\ 47'\ 32''$$

$$\cos\beta = \frac{(\mathbf{A} + \mathbf{B})_y}{|\mathbf{A} + \mathbf{B}|}$$

$$\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{134}}$$

$$\beta = 80^\circ\ 3'\ 3''$$

$$\cos\theta = \frac{(\mathbf{A} + \mathbf{B})_z}{|\mathbf{A} + \mathbf{B}|}$$

$$\cos\theta = -\frac{9}{\sqrt{134}}$$

$$\theta = 141^\circ\ 1'\ 50''$$

Observación

Haz como ejercicio la dirección de $\mathbf{A} - \mathbf{B}$

Suma y resta de vectores conociendo sus módulos y direcciones en el plano X,Y

Consideremos dos vectores A y B como los indicados en la figura 0,25(a), cuyas magnitudes son 10 y 20 unidades respectivamente, orientados

formando ángulos de 30° y 120° respecto del sentido positivo del eje x.

Hallar la magnitud de **A** + **B** y **A** - **B**

Calcular también las direcciones.

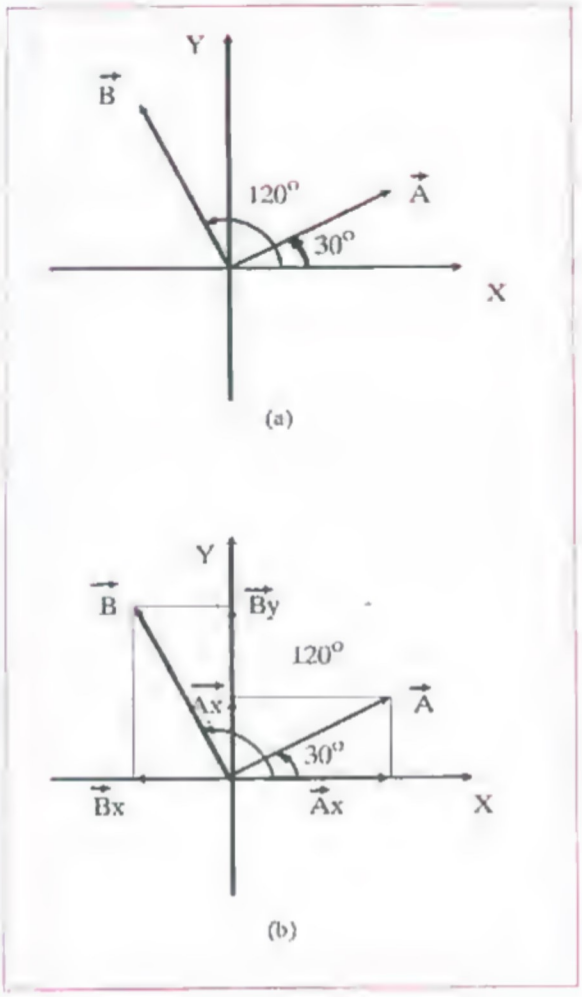


Figura 0.25

Solución

Sabemos que:

$|\mathbf{A}| = 10$ y $|\mathbf{B}| = 20$.

Las componentes de los vectores **A** y **B** en las direcciones de los ejes se muestran en la figura 0.25(b).

Calculemos las **magnitudes de las componentes:**

Sobre el eje x

$A_x = |\mathbf{A}|.\cos = 10.\cos 30^\circ.$

$A_x = 8{,}66$

$B_x = |\mathbf{B}|.\cos = 20.\cos 120^\circ$

$B_x = -10.$

$C_x = A_x + B_x = 8{,}66 - 10$

$C_x = -1{,}34$

Sobre el eje y

$A_y = |\mathbf{A}|.\text{sen} = 10.\text{sen } 30^\circ$

$A_y = 5$

$B_y = |\mathbf{B}|.\text{sen } 120^\circ = 20.\text{sen } 120^\circ.$

$B_y = 17{,}32$

$C_y = A_y + B_y = 5 + 17{,}32$

$C_y = 22{,}32.$

El vector suma **C** vendrá expresado en forma analítica así:

$\mathbf{C} = C_x\mathbf{i} + C_y\mathbf{j}$

$\mathbf{C} = -1{,}34\mathbf{i} + 22{,}32\mathbf{j}.$

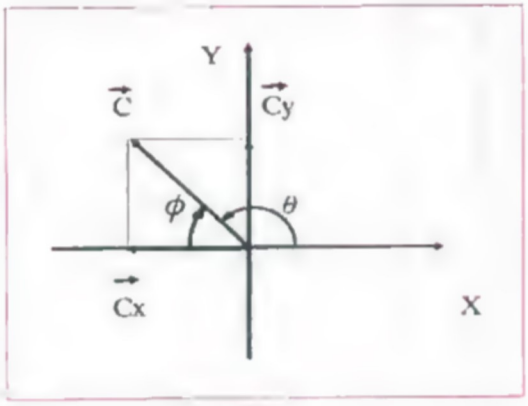


Figura 0.26(a)

La figura 0.26(a) muestra el vector **C**, suma de los vectores C_x y C_y.

Como la componente x de **C** es negativa está representada sobre el eje x hacia la izquierda a partir del origen.

Como la componente y de C es positiva está representada sobre el eje y hacia arriba a partir del origen.

La magnitud de C viene dada por:

$$|C| = \sqrt{(C_x)^2 + (C_y)^2}$$

$$= \sqrt{(-1,34)^2 + (22,32)^2}$$

$$= \sqrt{499,8}$$

$$\boxed{|C| = 22,36}$$

La dirección de C viene dada por el ángulo medido en el sentido contrario a las agujas del reloj desde la dirección positiva del eje x. Para ello calculemos primero el valor del ángulo ø usando la tangente:

$$\tan\phi = \frac{|C_y|}{|C_x|}$$

$$\tan\phi = \frac{22,32}{1,34}$$

$$\boxed{\phi = 86^o\ 33'\ 51''}$$

El ángulo θ medido contra las manecillas del reloj a partir de la dirección positiva del eje x nos dará la dirección de C y viene dado por:

$$\theta = 180^o - 86^o\ 33'\ 51''$$

$$\boxed{\theta = 93^o\ 26'\ 9''}$$

Encontremos ahora la diferencia **A - B**, la cual llamaremos **D**

$$D_x = (A_x - B_x)\mathbf{i} + (A_y - B_y)\mathbf{j}$$

$$= (8,66 - (-10))\mathbf{i} + (5 - 17,32)\mathbf{j}$$

$$\boxed{\mathbf{D} = 18,66\mathbf{i} - 12,32\mathbf{j}}$$

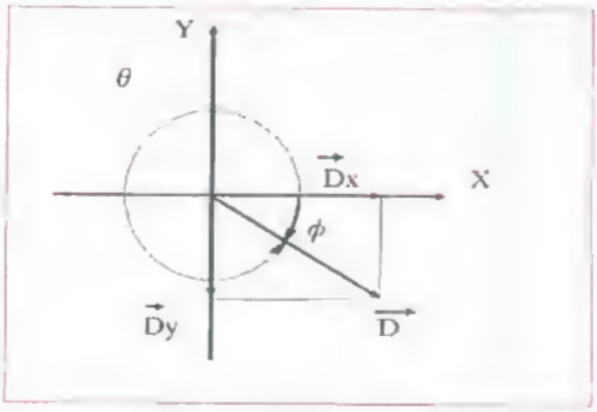


Figura 0.26(b)

La figura 0.26(b) muestra el vector diferencia **D.**

Como la componente x de **D** es positiva está ubicada sobre el eje x hacia la derecha.

Como la componente y de **D** es negativa está ubicada hacia abajo sobre el eje y.

La magnitud de D viene dada por:

$$|D| = \sqrt{(D_x)^2 + (D_y)^2}$$

$$= \sqrt{(18,55)^2 + (-12,32)^2}$$

$$\boxed{|D| = 22,26}$$

Para obtener **la dirección** del vector **D** (fig 0.26(b)), debemos calcular primero el valor del ángulo ϕ :

$$\tan\phi = \frac{|D_y|}{|D_x|}$$

$$\tan\phi = \frac{12,32}{18,66}$$

$$\boxed{\phi = 33^o\ 26''\ 32''}$$

El ángulo θ medido contra las manecillas del reloj a partir de la dirección positiva del eje x nos dará la dirección de **D**.

Este vector está ubicado en el cuarto cuadrante por lo que su dirección viene ubicada así:

$$\theta = 360^{\circ} - 33^{\circ}\,26'\,32''$$

$$\theta = 326^{\circ}\,33'.$$

Suma y resta de vectores conociendo el módulo y el ángulo que forman entre sí.

*** Suma**

Consideremos dos vectores coplanarios (que están ubicados en un mismo plano) de magnitudes $|V_1|$ y $|V_2|$ los cuales forman entre sí un ángulo que llamaremos α, tal como se muestra en la figura 0.27(a).

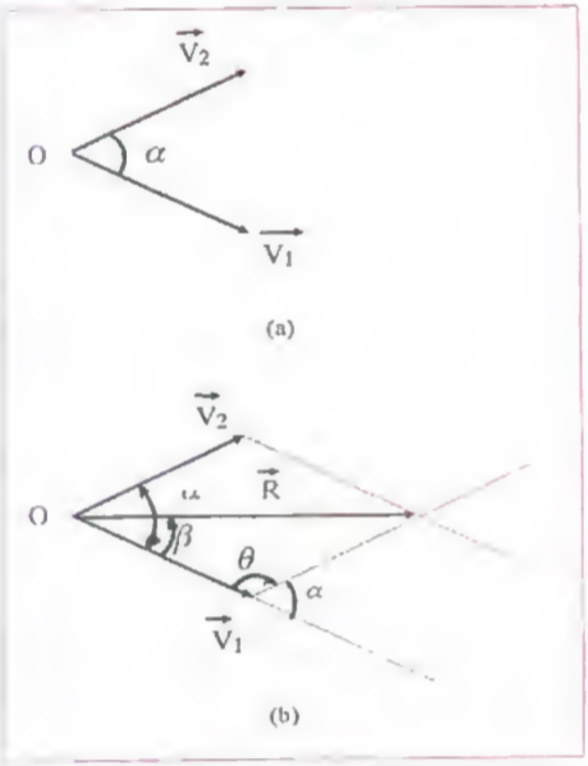


Figura 0.27

Para obtener la magnitud de **R**, tal como se muestra en la figura 0.27(b), trazamos por el extremo de V_1 una paralela a V_2 y por el extremo de V_2 una paralela a V_1. El punto de corte de las paralelas será el extremo del vector resultante **R** que tiene su origen en "O".

Si detallamos la figura notamos que **R** es la diagonal del paralelogramo. A este proceso se le llama **regla del paralelogramo.**

Por trigonometría sabemos que la magnitud de **R** puede calcularse usando el teorema del coseno, pudiéndose escribir que:

$$|R| = \sqrt{(V_1)^2 + (V_2)^2 - 2V_1V_2\cos\theta}$$

El ángulo ß que forma V_1 con **R** es la dirección de **R** y puede obtenerse por la ley de los senos:

$$\frac{|R|}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{|V_2|}{\operatorname{sen}\beta}$$

Despejando $\operatorname{sen}\beta$ nos queda:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{|V_2|.\operatorname{sen}\theta}{|R|}$$

$$\beta = \operatorname{arc\,sen}\frac{|V_2|.\operatorname{sen}\theta}{|R|}$$

*** Resta o diferencia**

En la figura 0.28 se tienen dos vectores V_1 y V_2.

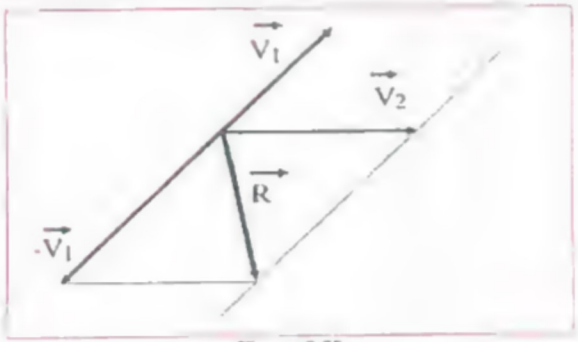


Figura 0.28

Para hallar la diferencia $V_2 - V_1$ trazamos el opuesto de V_1, el cual llamaremos $(-V_1)$ y luego sumamos $V_2 + (-V_1)$. Para ello usamos la regla del paralelogramo, obteniéndose la resultante **R**.

$$\mathbf{R} = V_2 + (-V_1).$$

Ejemplo 1

Consideremos dos fuerzas, como las indicadas en la figura 0.29, las cuales forman entre sí un ángulo de 30° y cuyos módulos son F = 60 N y P = 40 N.

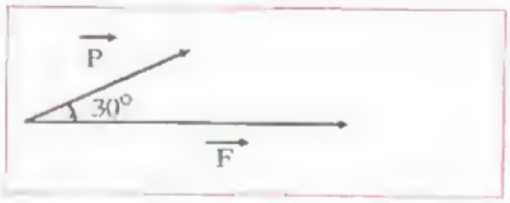


Figura 0.29

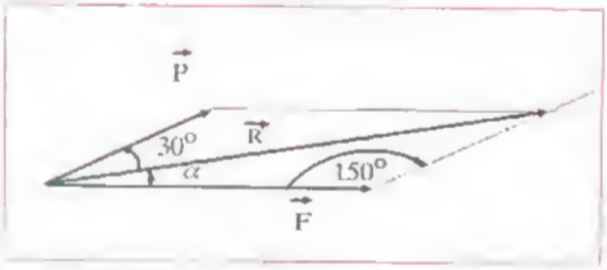


Figura 0.30

Observa en la figura 0.30 que por el extremo de **P** hemos trazado una paralela a **F**, y por el extremo de **F** hemos trazado una paralela a **P**. La resultante **R** es la diagonal del paralelogramo que va desde el punto común de los vectores **F** y **P**, hasta el punto donde se cortan las paralelas.

La magnitud de **R** se determina por la ley de los cosenos:

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{F^2 + P^2 - 2FP\cos 150^\circ}$$

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{(60\text{N})^2 + (40\text{N})^2 - 4800.\cos 150^\circ}$$

$$|\mathbf{R}| = 96{,}73\ \text{N}.$$

La dirección de **R** queda determinada al obtener el valor del ángulo α. Este se obtiene usando la ley de los senos:

$$\frac{|\mathbf{P}|}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{|\mathbf{R}|}{\operatorname{sen} 150^\circ}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{|\mathbf{P}|.\operatorname{sen} 150^\circ}{|\mathbf{R}|}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{40\text{N}.\operatorname{sen} 150^\circ}{96{,}73\text{N}}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = 0{,}206761$$

$$\alpha = 11^\circ\ 55'\ 57''$$

Este es el ángulo que forma **R** con la dirección de **F**.

En caso de ser los vectores perpendiculares, el ángulo que ellos forman es de 90° y el teorema del coseno puede ser escrito así:

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{F^2 + P^2 - 2FP.\cos 90^\circ}$$

Como $\cos 90^\circ = 0$ nos queda que:

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{F^2 + P^2}$$

Esta última expresión no es más que el teorema de Pitágoras.

0.15 Método de las componentes

Cuando dos o más vectores tienen un punto común de aplicación el cálculo de la resultante se hace sencillo cuando dichos vectores forman un ángulo recto. En este caso bastará aplicar el teorema de Pitágoras.

Cuando no están en ángulo recto, uno respecto de otro, el cálculo de la resultante se hace un poco más difícil. Para ello debemos recurrir al **método de las componentes**.

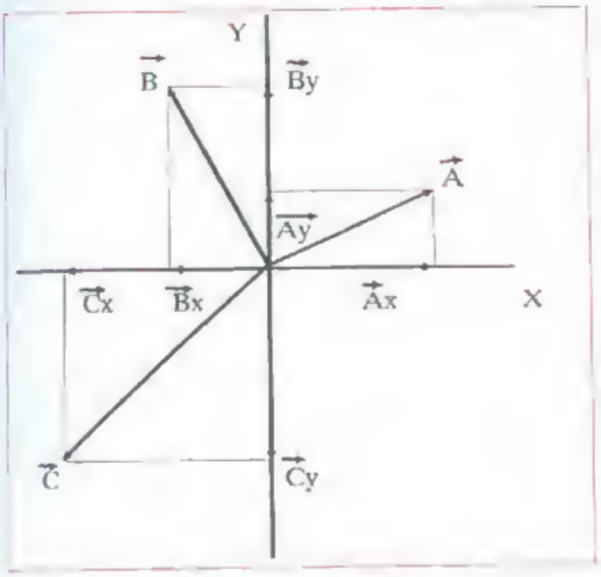


Figura 0.31

Tratemos de entender el método considerando la figura 0.31, en la cual se muestran tres vectores A, B y C. Veamos los pasos siguientes:

1. Se selecciona un sistema de ejes coordenados (x,y) y a partir del origen se dibujan todos y cada uno de los vectores A, B y C que se van a sumar.

2. Se calculan las componentes en las direcciones de los ejes x,y de todos los vectores.

3. Se encuentra la componente "x" de la resultante, haciendo la suma algebraica de las componentes en x de todos los vectores. (Recordemos que las componentes dirigidas hacia la derecha son positivas y las componentes dirigidas hacia la izquierda son negativas). Obsérvese figura 0.32.

$$R_x = A_x + B_x + C_x$$

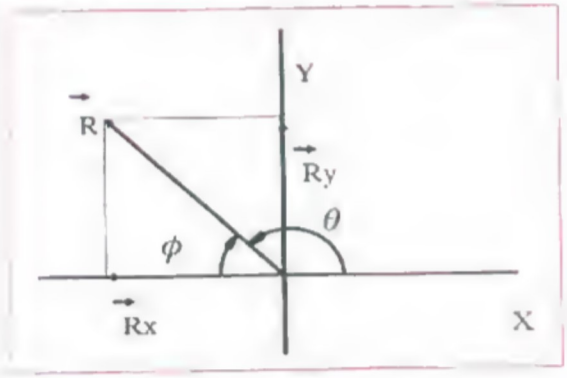


Figura 0.32

4. Se encuentra la componente "y" de la resultante, haciendo la suma algebraica de las componentes en "y" de todos los vectores. (Recordemos que las componentes sobre el eje "y" dirigidas hacia arriba son positivas y las dirigidas hacia abajo son negativas).

$$R_y = A_y + B_y + C_y$$

5. Se obtiene la magnitud de la resultante $|R|$ a partir de los vectores perpendiculares R_x y R_y usando el teorema de Pitágoras.

6. Se obtiene la dirección de la resultante a través de la relación:

$$\tan \phi = \frac{|R_y|}{|R_x|}$$

La dirección de R es el ángulo θ que forma el vector **R**, medido en sentido contrario a las manecillas del reloj desde la dirección positiva del eje x. Obsérvese la figura 0.32.

$$\theta = 180^\circ - \phi$$

Ejemplo.

Tenemos tres vectores de magnitudes $|V_1| = 20$ $|V_2| = 12$ y $|V_3| = 24$ de tal manera que formen con los ejes ángulos $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$ y $\theta = 60^\circ$. Observa la figura 0.33

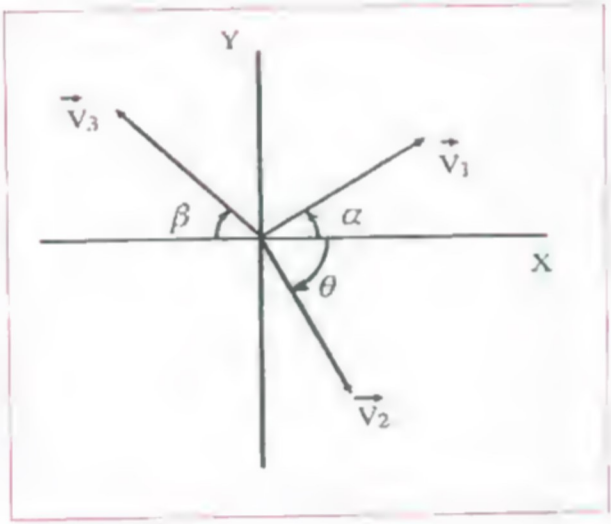


Figura 0.33

Si dibujamos la proyección de cada vector sobre los ejes coordenados encontramos sobre el eje "x" los vectores V_{1x}, V_{2x}, V_{3x} y sobre el eje "y" los vectores V_{1y}, V_{2y}, V_{3y}. Ver figura 0.34)

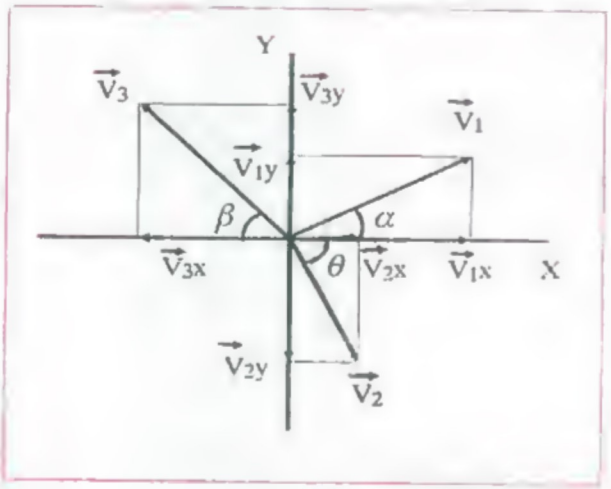


Figura 0.34

Determinemos las magnitudes de las componentes de cada uno de ellos sobre los ejes.

Sobre el eje x

$|V_{1x}| = |V_1|.\cos\alpha$

$|V_{1x}| = 20.\cos 30^o$

$|V_{1x}| = 17,32$

$|V_{2x}| = |V_2|.\cos ß$

$|V_{2x}| = 12.\cos 45^o$

$|V_{2x}| = 8,49$

$|V_{3x}| = -|V_3|.\cos\theta$

$|V_{3x}| = -24.\cos 60^o$

$|V_{3x}| = -12.$

Sobre el eje y

$|V_{1y}| = |V_1|.\text{sen}\,\alpha$

$|V_{1y}| = 20.\text{sen}\,30^o$

$|V_{1y}| = 10$

$|V_{2y}| = -|V_2|.\text{sen}\,45^o$

$|V_{2y}| = -12.\text{sen}45^o$

$|V_{2y}| = -8,49$

$|V_{3y}| = |V_3|.\text{sen}\,\theta$

$|V_{3y}| = 24.\text{sen}\,60^o$

$|V_{3y}| = 20.78$

La resultante sobre el eje "x" es:

$|R_x| = |V_{1x}| + |V_{2x}| + |V_{3x}|$

$|R_x| = 17,32 + 8,49 - 12$

$|R_x| = 13,81$

La resultante sobre el eje "y" es:

$|R_y| = |V_{1y}| + |V_{2y}| + |V_{3y}|$

$|R_y| = 10 - 8,49 + 20,78$

$|R_y| = 22,29$

La magnitud de la resultante está representada en la figura 0.35

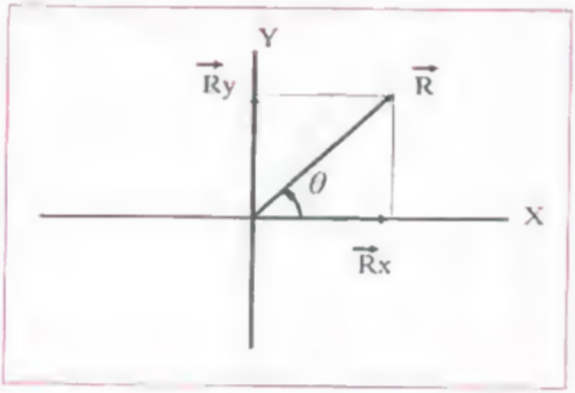


Figura 0.35

La magnitud de R viene expresada por:

$$|R| = \sqrt{|R_x|^2 + |R_y|^2}$$

$$|R| = \sqrt{(13{,}81)^2 + (22{,}29)^2}$$

$$|R| = 26{,}22.$$

La dirección de R viene dada por el ángulo θ medido en sentido contrario a las manecillas del reloj, medido desde la dirección positiva del eje x.

$$\tan\theta = \frac{|R_y|}{|R_x|}$$

$$\tan\theta = \frac{22{,}29}{13{,}81}$$

$$\theta = 58^{\circ}\ 13'\ 9''$$

0.16 Producto de un escalar por un vector

Sea A un vector y "m" un escalar. El producto del escalar "m" por el vector A es otro vector expresado como mA, que cumple los siguientes requisitos:

- mA tiene la misma dirección y sentido de A si m es positivo.
- mA tiene la misma dirección y sentido opuesto de A si m es negativo.
- El módulo de mA es m veces el de A.

Ejemplo

Sea m = 3 y sea A = 2i - 4j + 3k

mA = 3(2i - 4j + 3k)

mA = 6i -12j + 9k

Si m = -3 se tendrá que:

mA = -3(2i - 4j + 3k)

mA = -6i + 12j - 9k

La magnitud de mA viene dada así:

$$3.|A| = 3.\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 3^2}$$

$$= 3.\sqrt{29}$$

0.17 Producto escalar de dos vectores conociendo sus modulos y el ángulo que ellos forman.

Sean A y B dos vectores. Sea θ el ángulo que ellos forman (fig 0.36.)

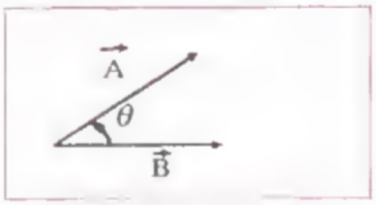


Figura 0.36

El producto escalar de dos vectores A y B es el escalar que resulta de multiplicar sus módulos por el coseno del ángulo que ellos forman. Se representa por un punto [.].

$$A.B = |A|.|B|.\cos\theta$$

Casos particulares

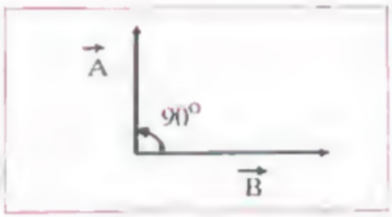


Figura 0.37

Si los vectores A y B son perpendiculares (fig 0.37), el ángulo que ellos forman es de 90°. Como $\cos 90^{\circ} = 0$ puede escribirse que:

Si $A \perp B$ entonces $A.B = 0$

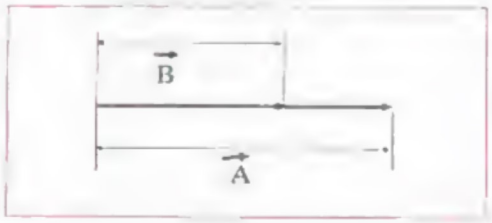


Figura 0.38

Si los vectores **A** y **B** son paralelos (fig 0.38) entonces el producto escalar es máximo porque $\cos 0^{\circ} = 1$, luego:

Si $A \parallel B$ entonces $A.B = 1$

Si el ángulo que forman es mayor de 90° el resultado del producto escalar es un número negativo.

Proyección de un vector sobre la dirección de otro.

Observemos las figuras 0.39 y 0.40

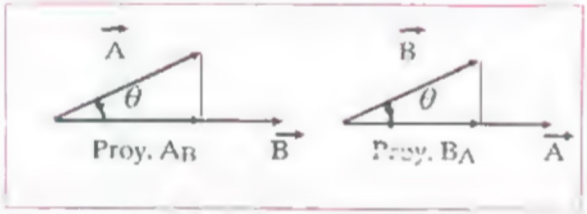


Figura 0.39 Figura 0.40

Usando trigonometría y observando la figura 0.39 podemos escribir la proyección de **A** sobre **B** así:

$$\text{Proy } A_B = |A|.\cos\theta \quad \text{.....(1)}$$

De la figura 0.40 podemos escribir que:

$$\text{Proy } B_A = |B|.\cos\theta \quad \text{.....(2)}$$

Sabemos por definición de producto escalar que:

$$A.B = |A|.|B|.\cos\theta \quad \text{.....(3)}$$

Si dividimos ambos miembros de (3) por el valor absoluto de $|A|$ se tiene que:

$$\frac{A.B}{|A|} = |B|.\cos\theta \quad \text{.....(4)}$$

De acuerdo con la expresión (2) el segundo miembro de (4) puede escribirse como:

$$\frac{A.B}{|A|} = \text{Proy } B_A \text{ (Proyección de B sobre A)}$$

Si en la expresión (3) dividimos ambos miembros por $|B|$, tendremos que:

$$\frac{A.B}{|B|} = |A|.\cos\theta \quad \text{.....(5)}$$

De acuerdo con la expresión (1) el segundo miembro de (5) puede escribirse como:

$$\frac{A.B}{|B|} = \text{Proy } A_B \text{ (Proyección de A sobre B)}$$

0.18 Producto escalar de los versores

Evaluemos el producto escalar de los versores. Sabemos, que los versores son vectores unitarios en ta direcciones de los ejes que tienen módulo igual a 1.

$$i.i = |i|.|i|.\cos 0^{\circ} = 1.1.1 = 1$$

De la misma forma ocurre que:

$$j.j = k.k = 1$$

Si evaluamos i.j se tiene·

$$i.j = |i|.|j|.\cos 90^{\circ} = 1.1.0 = 0$$

De la misma forma ocurre que:

$$i.j = j.k = 0.$$

Los resultados pueden ser resumidos en la siguiente tabla:

.	i	j	k
i	1	0	0
j	0	1	0
k	0	0	1

Tabla 0.1

0.19 Producto escalar de dos vectores conociendo sus expresiones analíticas

Consideremos dos vectores dados por sus expresiones analíticas:

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$$

Evaluemos el producto escalar **A.B**

$$\mathbf{A.B} = (A_x\mathbf{I} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}).(B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k})$$

Aplicando propiedad distributiva y haciendo uso de la tabla anterior (demuéstralo), llegamos a que:

$$\mathbf{A.B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

Ejemplo

Dados los vectores **A** y **B** en forma analítica:

$$\mathbf{A} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = -2\mathbf{I} + 4\mathbf{J} + \mathbf{K}$$

Hallar:

a) El producto escalar
b) El ángulo que forman
c) La proyección de **A** sobre **B**
d) $|2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}|$

Solución

a) El producto escalar de **A.B** viene dado por:

$$\mathbf{A.B} = (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}).(-2\mathbf{I} + 4\mathbf{J} + \mathbf{K})$$

$$= -2 - 8 + 3$$

$$\mathbf{A.B} = -7 \quad \text{.....(I)}$$

b) El ángulo que forman lo obtenemos al aplicar la definición de producto escalar:

$$\mathbf{A.B} = |\mathbf{A}|.|\mathbf{B}|.\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A.B}}{|\mathbf{A}|.|\mathbf{B}|} \quad \text{.....(II)}$$

Evaluemos $|\mathbf{A}|$ y $|\mathbf{B}|$.

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14} \quad \text{.....(III)}$$

$$|\mathbf{B}| = \sqrt{4 + 16 + 1} = \sqrt{21.} \quad \text{.....(IV)}$$

Sustituyendo (I), (III) y (IV) en (II) se tiene que:

$$\cos\theta = \frac{-7}{\sqrt{14}\,.\,\sqrt{21}} = \frac{7}{\sqrt{294}}$$

$$\theta = 114^{\circ}\,5'\,41''$$

c) La proyección de **A** sobre **B** se define:

$$\text{Proy}_{\mathbf{AB}} = \frac{\mathbf{A.B}}{|\mathbf{B}|} = \frac{-7}{\sqrt{21}}$$

d) Evaluemos $2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$

$$2(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + 3(-2\mathbf{I} + 4\mathbf{J} + \mathbf{K})$$

$$2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k} - 6\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

Luego

$2\mathbf{A} + 3\mathbf{B} = -4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ y por lo tanto

$$|2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}| = \sqrt{16 + 64 + 81} = \sqrt{161}$$